

**OTIMIZAÇÃO EM FORMULAÇÃO DE RAÇÕES UTILIZANDO
TÉCNICAS DE PROGRAMAÇÃO LINEAR: UM ESTUDO DE CASO EM PROCESSOS
INDUSTRIAIS**

Gerson Ulbricht (Instituto Federal de Santa Catarina) gerson.ulbricht@ifsc.edu.br.
Richardson Ribeiro (Universidade Tecnológica Federal do Paraná) richardsonr@utfpr.edu.br

Resumo:

Este artigo apresenta uma aplicação de ferramentas de programação linear em um problema de formulação de rações. A formulação de rações não é um processo trivial, pois envolve a combinação de ingredientes de modo a garantir a composição (química) que promova a nutrição animal buscando-se o menor custo produtivo. Para isso, um modelo matemático foi aplicado para otimizar a formulação da produção de modo a atender os requisitos quanto a nutrição e valores econômicos, permitindo a variabilidade nas quantidades dos ingredientes dentro de limites estabelecidos. O modelo proposto mostra o ganho em termos econômicos, validando a abordagem no estudo de caso proposto.

Palavras chave: Otimização, Programação Linear, Problema de Misturas.

**OPTIMIZATION IN FORMULATION FEED USING
LINEAR PROGRAMMING TOOLS - A CASE STUDY IN INDUSTRIAL
PROCESSES****Abstract:**

This article presents an application of linear programming tools to a food formulation problem. Such a formulation is a non-trivial process because it involves the combination of ingredients to ensure the composition (chemical) that promotes the animal nutrition searching the lower cost of production. For this, a mathematical model has been applied to optimize the formulation of production to attend the requirements as to nutrition and economic values, allowing the variability in the amounts of ingredients into established limits. The proposed model shows the gain in economic terms, validating the approach to proposed case study.

Key-words: Optimization, Productivity, Mixture Problem.

1. Introdução

A Pesquisa Operacional (PO) busca de maneira geral, estabelecer modelos matemáticos que demonstrem o funcionamento de determinados fenômenos, com o objetivo de otimizar processos, geralmente sob condições que exijam a utilização de recursos limitados.

Há várias áreas e problemas do mundo real que podem ser auxiliados com a PO, como por exemplo: gestão, economia, pesquisas de mercado, comunicação, logística, eficiência da produtividade, prevenção de acidentes, planejamento, controle de produção e outros.

Um estudo de PO consiste, basicamente, na construção de um modelo de otimização para um sistema real que sirva como instrumento de análise e compreensão do comportamento desse sistema, com o objetivo de alcançar objetivos bem como apresentar o desempenho desejado. (Andrade, 2002), (Ravindran et al., 1987), (Bronson & Naadimuthu, 1997).

Uma das principais técnicas utilizadas em PO é a programação linear (Silva, 1999). A programação linear é uma técnica de programação matemática que visa a resolução das

equações lineares via inversões de matrizes, de modo a otimizar o comportamento de um ou mais objetivos. (Caixeta-Filho, 2004).

Problemas de programação linear são comumente resolvidos utilizando o método *Simplex* (Dantzig, 1963) o qual trata-se de um algoritmo geral nas análises quantitativas de soluções de problemas, sendo bastante eficiente e adaptável computacionalmente (Goldbarg e Luna, 2005).

Usando o algoritmo *Simplex*, é possível determinar uma solução inicial e a partir desta buscar melhores soluções. Assim, o método permite o melhoramento constante na resolução de problemas através da análise de um ponto extremo, ou vértice, buscando outras soluções eficazes, por meio de inversão de matrizes.

Os problemas de misturas são típicos da administração da produção e uma das aplicações mais antigas da programação linear Cornell (1990), Myers & Montgomery (2002), Kowalski et al. (2002) e Prescott (2004). O objetivo em problemas de mistura é determinar quanto se deve usar de cada componente para que a proporção dos ingredientes no produto final seja cumprida ao mínimo custo, ou visando o máximo lucro possível (Moreira 1998). Em razão disso, a PO faz uso de modelos que permitem a avaliação segura antes de ser aplicada nas decisões conforme Loesch (1999), ficando a implementação dos resultados obtidos a critério do gestor.

Nesse artigo é apresentado um estudo de caso envolvendo dados reais obtidos em uma empresa produtora de rações para aves, situada no planalto norte do estado de Santa Catarina, Brasil. O objetivo é criar um primeiro cenário e assim abrir espaço para investigações mais aprofundadas dentro da empresa visando implementar as mudanças necessárias, bem como o de apresentar um trabalho prático que possa ser utilizado inclusive para fins didáticos.

Este artigo está organizado da seguinte maneira: na Seção 2 é apresentado o modelo geral de programação linear para problemas de misturas de rações. Na Seção 3 é apresentada a aplicação prática do modelo desenvolvido para a otimização do processo de formulação de rações. Já na Seção 4 é mostrado o comparativo entre o modelo empírico e o modelo científico proposto. E finalmente na Seção 5 são apresentadas as conclusões e considerações finais.

2 Modelo de programação linear para problemas de misturas de rações

Nesta seção é apresentado um modelo geral para a resolução de problemas de misturas de rações, empregando técnicas de programação linear de modo a buscar a otimização do processo produtivo para reduzir custos de produção.

O objetivo deste modelo é minimizar o custo de modo a produzir uma ração com o menor custo, de modo a atender às normas técnicas de nutrição e paladar. As subseções A a E formalizam a estrutura do modelo geral, que pode ser aplicado para qualquer número de ingredientes e rações.

A. Variáveis de Decisão

As variáveis de decisão são definidas como sendo os ingredientes a serem utilizados na formulação de um tipo específico de ração. Para isso define-se X_i como sendo a quantidade X de um ingrediente i .

B. Função Objetivo

O objetivo do problema é minimizar o custo para a formulação de uma ração. Desta forma tem-se a seguinte função objetivo:

z = Custo mínimo para a ração

X_i = Ingrediente “ i ”.

C_i = Custo (por Kg) do ingrediente i .

Tais elementos são atribuídos a um modelo matemático, conforme ilustrado na equação 1.

$$z = \text{Minimizar } C_1X_1 + C_2X_2 + \dots + C_nX_n \quad (1)$$

C. Formulação das Restrições Técnicas

As restrições técnicas consistem em determinar inequações que restrinjam a quantidade de cada nutriente na composição de um tipo de ração. Desta forma, o modelo de programação para as restrições técnicas é dado por:

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \dots + a_{1n}X_n = b_1$$

$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \dots + a_{2n}X_n = b_2$$

$$\dots$$
$$a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \dots + a_{mn}X_n = b_m$$

na qual a_{mn} é o valor atribuído ao componente nutricional m para o ingrediente n , e X_n é a quantidade X de um ingrediente n .

D. Formulação das Restrições de Demanda

As restrições de demanda consistem em inequações que restrinjam a quantidade de cada ingrediente na composição de um tipo de ração. Essas restrições determinam o paladar para a ração, garantindo uma mistura de forma a ser aceita em termos de consumo.

Há dois tipos de restrições de demanda: mínima e máxima. As restrições de demanda mínima se referem à menor quantidade possível a ser utilizada de um certo ingrediente na formulação de uma ração. Já as restrições de demanda máxima se referem à maior quantidade possível a ser utilizada de um determinado ingrediente.

O modelo de programação para as restrições de demanda mínima é dado por: $X_1 \geq y_1$; $X_2 \geq y_2$;
...; $X_m \geq y_m$

na qual x_m é quantidade a ser utilizada do ingrediente m , e y_m é a quantidade mínima admitida para o ingrediente m .

O modelo de programação para as restrições de demanda máxima é dado por:

$$X_1 \leq z_1; X_2 \leq z_2; \dots; X_m \leq z_m$$

na qual x_m é a quantidade a ser utilizada do ingrediente m , e z_m é a quantidade máxima admitida para o ingrediente m .

E. Restrições para a não Negatividade

A solução do sistema deve apresentar valores superiores ou iguais a zero, pois tratam de quantidades a serem utilizadas de cada ingrediente, e não há desta forma uma quantidade negativa. Têm-se então $X_i \geq 0$ para $(i=1,2,3,\dots,n)$.

3. Metodologia

Nesta seção é apresentada a aplicação prática do modelo desenvolvido para a otimização do processo de formulação de rações. Como estudo de caso, o modelo foi implementado em um tipo de ração para aves produzido por uma empresa do planalto norte de Santa Catarina.

Antes de detalharmos o modelo matemático, é mostrado nas tabelas 1 a 4 os valores referentes aos componentes utilizados. Para manter as características de paladar da ração, permitiu-se uma variação de 2% para cima e para baixo na quantidade utilizada pela empresa para cada ingrediente, garantindo assim as exigências nutricionais bem como a não variabilidade no consumo pelos animais. A tabela 1 apresenta os tipos de ingredientes para cada componente (variável) bem como as quantidades mínimas e máximas para uma produção de 1000kg de ração.

Variáveis	Ingredientes	Mínimo (Kg)	Máximo (Kg)
X1	Milho (Kg)	637,460	663,479
X2	Óleo de soja (Kg)	34,300	35,700
X3	Farelo de soja 46% (Kg)	233,240	242,760
X4	Farinha de carne 42,7% (Kg)	22,540	23,460
X5	Farinha de penas (Kg)	34,300	35,700
X6	Calcáreo 38% (Kg)	6,860	7,140
X7	Sal branco comum (Kg)	3,008	3,131
X8	Núcleo (Kg)	8,290	8,629

Tabela 1 - Demandas mínimas e máximas

Na tabela 2 são mostrados os ingredientes e sua composição nutricional, conforme dados fornecidos pela empresa fabricante de rações.

Nutriente	Unidade	Milho	Óleo Soja	F. de Soja 46%	F. de Carne 42.7%	Farinha de Penas	Calcáreo 38%	Sal Branco
Proteína bruta	%	8,49	-	45,32	43,00	65,50	-	-
Fibra Bruta	%	2,25	-	5,41	1,00	-	-	-
Cinza	%	-	-	-	36,50	-	-	-
Cálcio	%	0,04	-	0,24	13,00	2,56	38,40	-
Triptofano	%	0,05	-	0,62	0,19	0,56	-	-
Arginina	%	0,37	-	3,33	3,18	4,47	-	-
Sódio	%	-	-	-	-	-	-	39,70
Cloro	%	-	-	0,05	-	0,34	-	59,60
Potássio	%	0,35	-	0,53	6,00	1,37	-	-
Fósforo	%	0,26	-	1,83	-	0,35	-	-
Energia Metabolizada	KCAL/KG	3,23	8790,0	2256,0	-	3264,0	-	-
Lisina	%	0,24	-	2,77	1,98	2,84	-	-
Metionina	%	0,21	-	0,64	0,51	0,89	-	-
Acido Linoléico	%	-	53,93	0,67	-	2,00	-	-

Tabela 2 - Composição Nutricional dos ingredientes

Na tabela 3 é apresentada a exigência mínima para cada um dos nutrientes. Já na tabela 4, é apresentado o custo por quilograma de cada ingrediente que compõe a ração.

Nutriente	Unidade	Exigência Mínima
Proteína bruta	%	20,500
Fibra Bruta	%	3,069
Cinza	%	4,610
Cálcio	%	0,803
TRP Total (triptofano)	%	0,218
Arg (Arginina) total	%	1,350
Sódio	%	0,180
Cloro	%	0,323
Potássio	%	0,702
Fósforo	%	0,501
Energia Metabolizada	KCAL/KG	3241000
Lisina	%	1,156
Metionina	%	0,528
Acido Linoléico	%	3,300

Tabela 3 - Exigência mínima de cada nutriente que compõe a ração

Variáveis	Ingredientes	Custo Kg
X1	Milho (Kg)	R\$ 0,45
X2	Óleo de soja (Kg)	R\$ 2,96
X3	Farelo de soja 46% (Kg)	R\$ 1,20
X4	Farinha de carne 42,7% (Kg)	R\$ 0,65
X5	Farinha de penas (Kg)	R\$ 0,92
X6	Calcáreo 38% (Kg)	R\$ 0,11
X7	Sal branco comum (Kg)	R\$ 0,25
X8	Núcleo (Kg)	R\$ 7,33

Tabela 4 - Custo por Kg de cada ingrediente

Com base nos dados apresentados nas tabelas 1 a 4, é possível estabelecer um modelo de programação linear que permita gerar a formulação da ração dentro dos padrões técnicos exigidos.

Para a implementação do sistema proposto, foi utilizado o software LINDO - Linear, INteractive, and Discrete Optimizer (Lindo Systems Inc., 1996). Para isso a sintaxe do modelo deve sofrer algumas alterações requisitadas pela linguagem de programação utilizada.

O quadro 1 apresenta o modelo já adaptado para este sistema computacional.

$\text{MIN } 0.45X1 + 2.96X2 + 1.20X3 + 0.65X4 + 0.92X5 + 0.11X6 + 0.25X7 + 7.33X8$
ST
!Restrições Técnicas
Prot_B) $8.49X1 + 45.32X3 + 43X4 + 65.5X5 \geq 20.50$
Fib_B) $2.25X1 + 5.41X3 + 1X4 \geq 3.069$
Cinza) $36.500X4 \geq 4.610$
Calcio) $0.04X1 + 0.24X3 + 13X4 + 2.560X5 + 38.400X3 \geq 0.803$
TRP) $0.05X1 + 0.62X3 + 0.190X4 + 0.560X5 \geq 0.218$

```

Arg) 0.37X1 + 3.33X3 + 3.180X4 + 4.470X5 >= 1.350
Sodio) 39.700X7 >= 0.180
Cloro) 0.05X3 + 0.340X5 + 59.600X7 >= 0.323
Fosforo) 0.35X1 + 0.53X3 + 6X4 + 1.370X5 >= 0.702
Pot) 0.26X1 + 1.83X3 + 0.35X5 >= 0.501
Ene_Met) 3.23X1 + 8790X2 + 2256X3 + 3264X5 >= 3241
Lisina) 0.24X1+ 2.77X3 + 1.980X4 + 2.840X5 >= 1.156
Metio) 0.21X1 + 0.64X3 + 0.510X4 + 0.890X5 >= 0.528
Acido_L) 53.92X2 + 0.67X3 + 2X5 >= 3.300
!Restrições de Demanda Mínima
X1>= 637.461
X2>=34.300
X3>=233.240
X4>=22.540
X5>=34.300
X6>=6.860
X7>=3.009
X8>=8.291
!Restrições de Demanda Máxima
X1<= 663.479
X2<= 35.700
X3<= 242.760
X4<= 23.460
X5<= 35.700
X6<= 7.140
X7<= 3.131
X8<= 8.629
!Total a ser produzido: 1000kg
Total) X1 + X2 + X3 + X4 + X5 + X6 + X7 + X8 = 1000

```

Quadro 1 - Modelo implementado no LINDO

O resultado gerado a partir da sintaxe do quadro 1 é mostrado no quadro 2.

```

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 0
OBJECTIVE FUNCTION VALUE
1) 785.6403
VARIABLE VALUE REDUCED COST
X1 657.057983 0.000000
X2 34.299999 0.000000
X3 233.240005 0.000000
X4 22.540001 0.000000
X5 34.299999 0.000000
X6 7.140000 0.000000
X7 3.131000 0.000000
X8 8.291000 0.000000

```

Quadro 2 - Relatório de resultados gerados por resolução computacional

Com os valores apresentados no quadro 2, percebe-se que para a redução dos custos de produção da ração, mantendo-se os padrões de nutrição exigidos podem ser implementadas algumas variações nas quantidades dos ingredientes.

A tabela 5 apresenta as quantidades utilizadas no processo de produção atual, bem como as sugeridas pelo modelo computacional de otimização.

Ingredientes	Quantidades utilizadas (Kg)	Quantidades sugeridas (Kg)
Milho (Kg)	650,470	657,057
Óleo de soja (Kg)	35,000	34,299
Farelo de soja 46% (Kg)	238,000	233,240
Farinha de carne 42,7% (Kg)	23,000	22,540
Farinha de penas (Kg)	35,000	34,299
Calcáreo 38% (Kg)	7,000	7,140
Sal branco comum (Kg)	3,070	3,131
Núcleo (Kg)	8,460	8,291

Tabela 5 - Quantidades dos ingredientes, utilizadas e sugeridas para produção de um lote de 1000 kg de ração

4 Comparativo entre Modelos

Para analisar a redução dos custos na produção de rações, foi comparado o procedimento realizado por um especialista humano (método empírico) com o modelo computacional de otimização.

4.1 Modelo Usado pelo Especialista Humano

Atualmente, a empresa possui um sistema informatizado que controla a produção de maneira automatizada onde a combinação de ingredientes é pré-determinada. Este procedimento é igualmente estabelecido para todos os tipos de rações produzidos. Para fazer o comparativo, tomou-se como base o tipo de ração chamado de “Ração Retirada - 400”, a mesma base do cálculo do modelo de otimização.

A tabela 6 mostra a quantidade e o custo de cada ingrediente utilizado para produzir 1000Kg da “Ração Retirada - 400”.

Ingredientes	Quantidade (Kg)	Custo (Kg)	Custo por tonelada
Milho (Kg)	650,470	R\$ 0,45	R\$ 292,71
Óleo de soja (Kg)	35,000	R\$ 2,96	R\$ 103,60
Farelo de soja 46% (Kg)	238,000	R\$ 1,20	R\$ 285,60
Farinha de carne 42,7% (Kg)	23,000	R\$ 0,65	R\$ 14,95
Farinha de penas (Kg)	35,000	R\$ 0,92	R\$ 32,20
Calcáreo 38% (Kg)	7,000	R\$ 0,11	R\$ 0,77
Sal branco comum (Kg)	3,070	R\$ 0,25	R\$ 0,77
Núcleo (Kg)	8,460	R\$ 7,33	R\$ 62,01
Custo total por tonelada			R\$ 792,61

Tabela 6 - Quantidades e custo dos ingredientes utilizados no modelo utilizado na empresa

Observa-se que o custo total de fabricação deste tipo de ração é de R\$ 792,61 por tonelada, utilizando a forma de programação habitual da empresa.

4.2 Modelo Científico

O cálculo do custo pelo modelo de otimização científico prevê diferentes consumos de ingredientes na fabricação de rações para alcançar à redução dos custos totais de produção.

A tabela 7 mostra a quantidade proposta pelo modelo otimizado, para produzir 1000Kg de ração.

Ingredientes	Quantidade (Kg)	Custo (Kg)	Custo por tonelada
Milho (Kg)	643,818	R\$ 0,45	R\$ 295,68
Óleo de soja (Kg)	35,700	R\$ 2,96	R\$ 101,53
Farelo de soja 46% (Kg)	242,760	R\$ 1,20	R\$ 279,89
Farinha de carne 42,7% (Kg)	23,460	R\$ 0,65	R\$ 14,65
Farinha de penas (Kg)	35,700	R\$ 0,92	R\$ 31,56
Calcáreo 38% (Kg)	7,140	R\$ 0,11	R\$ 0,79
Sal branco comum (Kg)	3,131	R\$ 0,25	R\$ 0,78
Núcleo (Kg)	8,291	R\$ 7,33	R\$ 60,77
Custo total por tonelada			R\$ 785,64

Tabela 7 - Modelo Otimizado: Quantidades e custo dos ingredientes utilizados

Comparando os resultados mostrados na tabela 6 e 7, verifica-se uma redução no custo por tonelada produzida de R\$ 6,97. Na empresa em que os dados foram obtidos, a produção média de ração diária é de aproximadamente 280 toneladas. Com isso, o modelo científico indica que o custo de produção pode ser melhorado em 0,88%, o que representa um ganho diário de aproximadamente R\$ 1.900,00.

Sendo assim, o sistema se mostra capaz de produzir um diferencial significativo quando se considera o custo diário de produção da fábrica.

5 Considerações finais

Um dos objetivos deste trabalho foi demonstrar que empresas podem se beneficiar das ferramentas utilizadas na PO, melhorando a rentabilidade.

O modelo apresentado neste artigo pode ser implementado em empresas produtoras de rações, ou por empresas que tratem de problemas de misturas como medicamentos, ligas metálicas, alimentos, etc, servindo como base estrutural para o desenvolvimento e adaptação para outros estudos.

Há de se considerar que devido às restrições referentes ao paladar da ração, optou-se por desviar-se da fórmula original em apenas 2% para cima e para baixo, e mesmo assim houve uma redução de custo considerável. Um estudo pode ser realizado para verificar se esse percentual de variabilidade poderia ser aumentado, o que pode ocasionar maior redução no custo de produção. Do ponto de vista administrativo, os resultados mostram que a aplicação do modelo de otimização melhora esse custo.

Apesar do fato de que as ferramentas de otimização serem de pouco conhecimento pelas empresas, seu formalismo mostra seus benefícios em diferentes processos industriais, comerciais ou logísticos.

Apesar dos resultados iniciais serem encorajadores com relação ao modelo proposto, estudos complementares são importantes para a evolução da abordagem, pois a diversidade de experimentos a serem produzidos é enorme, o que faz surgirem novos cenários a serem estudados.

Portanto, estudos adicionais em outras direções são necessários para responder algumas questões em aberto, por exemplo, a análise do núcleo, componente da ração que se constitui de hormônios, vitaminas, entre outros, chamados micro ingredientes, podem ser estudados separadamente da fórmula analisada nesse trabalho, o qual tratou de macro ingredientes bem como o estudo sobre a alteração no paladar de forma a verificar qual a margem de variabilidade segura para alterações na quantidade dos ingredientes da fórmula. Essas indicações são objetos de estudos para pesquisas futuras.

6 Referências bibliográficas

- ANDRADE, Eduardo Leopoldino de.** Introdução á Pesquisa Operacional, métodos e modelos para análise de decisões. 3ª edição. Rio de Janeiro: LTC editora, 2002.
- BRONSON, R. & NAADIMUTHU, G.** Operations Research, 2nd Ed.. New York: McGraw-Hill, 1997.
- CAIXETA-FILHO, José Vicente.** Pesquisa Operacional: Técnicas de Otimização Aplicadas a sistemas Agroindustriais. São Paulo: Atlas, 2004.
- CHIAVENATO, Idalberto.** Administração nos novos tempos, 2ª edição. Rio de Janeiro: editora Campus, 2005.
- CORNELL, J.A. (1990).** Experiments with Mixtures: Designs, Models and the Analysis of Mixture Data. Second edition, John Wiley & Sons, New York, NY.
- G.B. DANTZIG.** Linear Programming and Extensions. Princeton University, 1963.
- GOLDBARG, Marco César; LUNA, Henrique Pacca L.** Otimização combinatória e Programação Linear. 2ª edição. São Paulo: editora Campus, 2005.
- KOWALSKI, S.M.; CORNELL, J.A. & VINING, G.G. (2002).** Split-Plot Designs and Estimation Methods for Mixture Experiments with Process Variables. Technometrics, 44, 72-79.
- Lindo Systems Inc.,** Chicago. LINDO: User's Manual, 1996
- LOESCH, Cláudio. HEIN, Nelson.** Pesquisa Operacional fundamentos e modelos. Blumenau: Editora da FURB, 1999.
- MOREIRA, Daniel A.** Administração da produção e operações. 3ª edição. São Paulo: Livraria pioneira editora, 1998.
- MYERS, R.H.; MONTGOMERY, D.C. & VINING, G.G. (2002).** Generalized Linear Models with Applications in Engineering and the Sciences. John Wiley & Sons, New York, NY.
- PRESCOTT, P. (2004).** Modelling in Mixture Experiments Including Interactions with Process Variables. Quality Technology & Quantitative Management, 1, 87-103.
- RAVINDRAN, A., PHILLIPS, D.T. & SOLBERG, J.J.** Operations Research, Principles and Practice, 2nd Ed.. New York: John Wiley, 1987.
- ROSTAGNO, Horácio Santiago.** Tabelas brasileiras para aves e suínos, composição de alimentos e exigências nutricionais. 2ª edição. Viçosa: UFV, Departamento de zootecnia, 2005.
- SILVA, E. M. et al.** Pesquisa operacional: programação linear. São Paulo: Atlas, 1999.