

**OTIMIZAÇÃO EM FORMULAÇÃO DE RAÇÕES UTILIZANDO
FERRAMENTAS DE PROGRAMAÇÃO LINEAR – UM ESTUDO DE CASO**

Gerson Ulbricht (Instituto Federal de Santa Catarina) gerson.ulbricht@ifsc.edu.br.
Richardson Ribeiro (Universidade Tecnológica Federal do Paraná) richardsonr@utfpr.edu.br

Resumo:

Este artigo apresenta uma aplicação de ferramentas de programação linear em um problema de formulação de rações em uma empresa situada no planalto norte de Santa Catarina, Brasil. O objetivo foi propor uma fórmula para produção de ração que atenda aos requisitos mínimos e máximos estabelecidos para nutrição com o menor custo possível. Houve ainda a preocupação para que as mudanças não fossem demasiadas para que deste modo, houvesse alteração mínima no paladar. O modelo proposto sofreu implementação computacional onde foi possível verificar a possibilidade de produzir rações com custo menor de modo a atender as necessidades nutricionais.

Palavras chave: Otimização, Produtividade, Problema de Misturas.

**OPTIMIZATION IN FORMULATION FEED USING
LINEAR PROGRAMMING TOOLS - A CASE STUDY**

Abstract:

This article presents an application of linear programming tools to a food formulation problem in a company in the north of Santa Catarina, Brazil. The main objective was to propose a formula for food production that met the minimum and maximum guidelines for nutrition at the lowest cost. There was also concern that this formula would cause minimal change in taste. The proposed model had computational implementation which proved it was possible to produce lower cost food with nutritional balance.

Key-words: Optimization, Productivity, Mixture Problem.

1. Introdução

A Pesquisa Operacional (P.O.) busca de modo geral, estabelecer modelos matemáticos que expliquem o funcionamento de determinados fenômenos, com o objetivo de otimizar processos.

Os problemas de otimização que podem ser tratados utilizando ferramentas da P.O. estão presentes no área da gestão, economia, pesquisas de mercado, comunicação, logística, eficiência da produtividade, prevenção de acidentes, planejamento, controle de produção e outros. Um estudo de pesquisa Operacional consiste, basicamente, na construção de um modelo para um sistema real que sirva como instrumento de análise e compreensão do comportamento desse sistema, com o objetivo de alcançar objetivos bem como apresentar o desempenho desejado ANDRADE (2002).

Uma das principais técnicas utilizadas em PO é a programação linear, ferramenta que foi utilizada na resolução do estudo de caso apresentado neste artigo. A programação linear é uma técnica de programação matemática que visa a resolução das equações lineares via inversões das matrizes, de modo a otimizar o comportamento de um ou mais objetivos Caixeta-Filho, (2004).

Problemas de programação linear são comumente resolvidos utilizando o método Simplex o qual trata-se de um algoritmo geral indispensável nas análises quantitativas de soluções de problemas, sendo bastante eficiente e adaptável computacionalmente GOLDBARG e LUNA (2005).

Através do algoritmo Simplex, é possível determinar uma solução viável e a partir desta buscar novas opções de resultado igual, ou melhor. Sendo assim, o método permite o melhoramento constante na resolução de problemas através da análise de um ponto extremo, ou vértice, buscando outras soluções eficazes, por meio de inversão de matrizes.

Os problemas de misturas são típicos da administração da produção e uma das aplicações mais antigas da Programação Linear. Os componentes têm um dado custo e contém ingredientes específicos que devem estar presentes no produto final, numa certa proporção. O objetivo dos problemas de mistura é determinar quanto se deve usar de cada componente para que a proporção dos ingredientes no produto final seja cumprida ao mínimo custo, ou visando o máximo lucro possível MOREIRA (1998).

Considerando a atuação das empresas, o ambiente dos negócios se mostra mutável e complexo, sendo que os administradores precisam confiança em suas ações, sempre observando os fatores influenciadores da organização, internos e externos (CHIAVENATO, 2005). A P.O. em razão dessas influencias faz uso de modelos que permitem a avaliação segura antes de ser aplicada nas decisões conforme LOESCH (1999), ficando a implementação dos resultados obtidos a critério do gestor.

Nesse artigo é apresentado um estudo de caso envolvendo dados reais obtidos em uma empresa produtora de rações para aves, situada no planalto norte do estado de Santa Catarina, Brasil. O objetivo é criar um primeiro cenário e assim abrir espaço para investigações mais aprofundadas dentro da empresa visando implementar as mudanças necessárias, bem como o de apresentar um trabalho prático que possa ser utilizado para fins didáticos.

2 Modelo geral de programação linear para problemas de misturas de rações

A seguir é apresentado um modelo geral para resolução de problemas de misturas, envolvendo técnicas de programação linear de modo a buscar a otimização do processo produtivo, reduzindo custos de produção.

O objetivo do modelo é minimizar o custo de modo a se produzir uma ração com menor custo possível, atendendo a todos os requisitos solicitados de nutrição e com o mínimo impacto na mudança de sabor, o que poderia ocasionar mudanças nos hábitos de consumo animal.

Apresenta-se a seguir um modelo geral, que pode ser aplicado para todo tipo de ração abrangendo qualquer número de ingredientes.

2.1 Variáveis de Decisão

As variáveis de decisão são definidas como sendo os ingredientes a serem utilizados na formulação de um tipo específico de ração. Para isso define-se " X_i " como a quantidade " X " do ingrediente " i ".

2.2 Função Objetivo

O objetivo do problema é minimizar o custo de rações. Desta forma tem-se a seguinte função objetivo:

$$\begin{aligned}z &= \text{Custo mínimo para a ração} \\C_i &= \text{Custo (por Kg) do ingrediente "i"}. \\X_i &= \text{Ingrediente "i"}.\end{aligned}$$

Atribuindo a um modelo matemático obtêm-se:

$$z = \text{Minimizar } C_1X_1 + C_2X_2 + \dots + C_nX_n$$

2.3 Formulação das Restrições Técnicas

As restrições técnicas consistem em determinar inequações que restrinjam a quantidade de cada nutriente na composição de um tipo de ração. Desta forma, o modelo de programação para as restrições técnicas é dado por:

$$\begin{aligned}a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \dots + a_{1n}X_n &= b_1 \\a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \dots + a_{2n}X_n &= b_2 \\&\dots \\a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \dots + a_{mn}X_n &= b_m\end{aligned}$$

Onde:

a_{mn} : Valor atribuído ao componente nutricional m para o ingrediente n .
 X_n : quantidade "X" do ingrediente "n".

2.4 Formulação das Restrições de Demanda

As restrições de demanda consistem em inequações que restrinjam a quantidade de cada ingrediente na composição de um tipo de ração. Essas restrições determinam o paladar para a ração, garantindo uma mistura de forma a ser aceita em termos de consumo, pelos animais.

Há dois tipos de restrições de demanda: mínima e máxima. As restrições de demanda mínima se referem à menor quantidade possível a ser utilizada de um certo ingrediente na formulação de uma ração enquanto que as restrições de demanda máxima se referem à maior quantidade possível a ser utilizada de determinado ingrediente

O modelo de programação para as restrições de demanda mínima é dado por:

$$X_1 \geq y_1; X_2 \geq y_2; \dots; X_m \geq y_m$$

Onde:

x_m : quantidade a ser utilizada do ingrediente "m".
 y_m : quantidade mínima admitida para o ingrediente "m".

O modelo de programação para as restrições de demanda máxima é dado por:

$$X_1 \leq z_1; X_2 \leq z_2; \dots; X_m \leq z_m$$

Onde:

x_m : quantidade a ser utilizada do ingrediente "m".
 z_m : quantidade máxima admitida para o ingrediente "m".

2.5 Restrições de não negatividade

A solução do sistema deve apresentar valores maiores ou iguais a zero, já que se tratam de quantidades a serem utilizadas de cada ingrediente, e não há desta forma uma quantidade negativa. Têm-se então $X_i \geq 0$ para $(i=1,2,3,\dots,n)$.

3. Implementação do modelo

Neste tópico apresenta-se a aplicação prática do modelo criado para otimização do processo de fabricação de rações. Como estudo de caso, o modelo foi implementado em um dos tipos de ração para aves produzido por uma empresa do planalto norte de Santa Catarina, denominada Ração Retirada – 400.

Para minimizar a alteração das características de paladar da ração, permitiu-se uma variação de 2% para cima e para baixo na quantidade utilizada usualmente pela empresa para cada ingrediente, garantindo assim as exigências nutricionais bem como a não variabilidade no consumo pelos animais. A tabela a seguir apresenta os tipos de ingredientes bem como as quantidades mínimas e máximas restritas levando em consideração a mínima alteração no paladar, para a produção de 1000kg de ração.

| Variáveis | Ingredientes | Mínimo (Kg) | Máximo (Kg) |
|-----------|-----------------------------|-------------|-------------|
| X1 | Milho (Kg) | 637,460 | 663,479 |
| X2 | Óleo de soja (Kg) | 34,300 | 35,700 |
| X3 | Farelo de soja 46% (Kg) | 233,240 | 242,760 |
| X4 | Farinha de carne 42,7% (Kg) | 22,540 | 23,460 |
| X5 | Farinha de penas (Kg) | 34,300 | 35,700 |
| X6 | Calcáreo 38% (Kg) | 6,860 | 7,140 |
| X7 | Sal branco comum (Kg) | 3,008 | 3,131 |
| X8 | Núcleo (Kg) | 8,290 | 8,629 |

Fonte: Dados obtidos pelo autor

Tabela 1 - Demanda para cada tipo de ingrediente

Para cada um dos ingredientes utilizados é apresentada a composição nutricional, conforme dados obtidos com empresa fabricante de rações os quais são mostrados na tabela 2.

| Nutriente | Unidade | Milho | Óleo Soja | F. de Soja 46% | F. de Carne 42.7% | Fari-nha de Penas | Calcá-reo 38% | Sal Branco |
|----------------------|---------|-------|-----------|----------------|-------------------|-------------------|---------------|------------|
| Proteína bruta | % | 8,49 | - | 45,32 | 43,00 | 65,50 | - | - |
| Fibra Bruta | % | 2,25 | - | 5,41 | 1,00 | - | - | - |
| Cinza | % | - | - | - | 36,50 | - | - | - |
| Cálcio | % | 0,04 | - | 0,24 | 13,00 | 2,56 | 38,40 | - |
| Triptofano | % | 0,05 | - | 0,62 | 0,19 | 0,56 | - | - |
| Arginina | % | 0,37 | - | 3,33 | 3,18 | 4,47 | - | - |
| Sódio | % | - | - | - | - | - | - | 39,70 |
| Cloro | % | - | - | 0,05 | - | 0,34 | - | 59,60 |
| Potássio | % | 0,35 | - | 0,53 | 6,00 | 1,37 | - | - |
| Fósforo | % | 0,26 | - | 1,83 | - | 0,35 | - | - |
| Energia Metabolizada | KCAL/KG | 3,23 | 8790,0 | 2256,0 | - | 3264,0 | - | - |
| Lisina | % | 0,24 | - | 2,77 | 1,98 | 2,84 | - | - |
| Metionina | % | 0,21 | - | 0,64 | 0,51 | 0,89 | - | - |
| Acido Linoléico | % | - | 53,93 | 0,67 | - | 2,00 | - | - |

Fonte: Dados obtidos pelo autor

Tabela 2 - Composição Nutricional dos ingredientes

Na tabela 3, é apresentada a exigência mínima para cada cada um dos nutrientes para a produção.

| Nutriente | Unidade | Exigência Mínima |
|------------------------|---------|------------------|
| Proteína bruta | % | 20,500 |
| Fibra Bruta | % | 3,069 |
| Cinza | % | 4,610 |
| Cálcio | % | 0,803 |
| TRP Total (triptofano) | % | 0,218 |
| Arg (Arginina) total | % | 1,350 |
| Sódio | % | 0,180 |
| Cloro | % | 0,323 |
| Potássio | % | 0,702 |
| Fósforo | % | 0,501 |
| Energia Metabolizada | KCAL/KG | 3241000 |
| Lisina | % | 1,156 |
| Metionina | % | 0,528 |
| Acido Linoléico | % | 3,300 |

Fonte: Dados obtidos pelo autor

Tabela 3 - Exigência mínima de cada nutriente que compõe a ração

A tabela 4 apresenta o custo por kg de cada ingrediente que compõe a ração.

| Variáveis | Ingredientes | Custo Kg |
|-----------|-----------------------------|----------|
| X1 | Milho (Kg) | R\$ 0,45 |
| X2 | Óleo de soja (Kg) | R\$ 2,96 |
| X3 | Farelo de soja 46% (Kg) | R\$ 1,20 |
| X4 | Farinha de carne 42,7% (Kg) | R\$ 0,65 |
| X5 | Farinha de penas (Kg) | R\$ 0,92 |
| X6 | Calcáreo 38% (Kg) | R\$ 0,11 |
| X7 | Sal branco comum (Kg) | R\$ 0,25 |
| X8 | Núcleo (Kg) | R\$ 7,33 |

Fonte: Dados obtidos pelo autor

Tabela 4 - Custo por Kg de cada ingrediente

4. Implementação Computacional

Com base nos dados apresentados anteriormente, foi possível estabelecer o modelo de programação linear que garante a formulação da ração dentro dos padrões desejados.

Há no mercado vários sistemas computacionais para resolução de problemas de programação linear. O modelo a seguir foi programado em software específico. Para isso a sintaxe do modelo deve sofrer algumas alterações requisitadas pela linguagem de programação utilizada.

O quadro 1 apresenta o modelo já adaptado para este sistema computacional.

$$\begin{aligned} & \text{MIN } 0.45X_1 + 2.96X_2 + 1.20X_3 + 0.65X_4 + 0.92X_5 + 0.11X_6 + 0.25X_7 + \\ & 7.33X_8 \\ & \text{ST} \\ & \text{!Restrições Técnicas} \\ & \text{Prot_B)} 8.49X_1 + 45.32X_3 + 43X_4 + 65.5X_5 \geq 20.50 \\ & \text{Fib_B)} 2.25X_1 + 5.41X_3 + 1X_4 \geq 3.069 \end{aligned}$$

```

Cinza) 36.500X4 >= 4.610
Calcio) 0.04X1 + 0.24X3 + 13X4 + 2.560X5 + 38.400X3 >= 0.803
TRP) 0.05X1 + 0.62X3 + 0.190X4 + 0.560X5 >= 0.218
Arg) 0.37X1 + 3.33X3 + 3.180X4 + 4.470X5 >= 1.350
Sodio) 39.700X7 >= 0.180
Cloro) 0.05X3 + 0.340X5 + 59.600X7 >= 0.323
Fosforo) 0.35X1 + 0.53X3 + 6X4 + 1.370X5 >= 0.702
Pot) 0.26X1 + 1.83X3 + 0.35X5 >= 0.501
Ene_Met) 3.23X1 + 8790X2 + 2256X3 + 3264X5 >= 3241
Lisina) 0.24X1 + 2.77X3 + 1.980X4 + 2.840X5 >= 1.156
Metio) 0.21X1 + 0.64X3 + 0.510X4 + 0.890X5 >= 0.528
Acido_L) 53.92X2 + 0.67X3 + 2X5 >= 3.300
!Restrições de Demanda Mínima
X1>= 637.461
X2>=34.300
X3>=233.240
X4>=22.540
X5>=34.300
X6>=6.860
X7>=3.009
X8>=8.291
!Restrições de Demanda Máxima
X1<= 663.479
X2<= 35.700
X3<= 242.760
X4<= 23.460
X5<= 35.700
X6<= 7.140
X7<= 3.131
X8<= 8.629
!Total a ser produzido: 1000kg
Total) X1 + X2 + X3 + X4 + X5 + X6 + X7 + X8 = 1000

```

Fonte: Dados obtidos pelo autor

Quadro 1 - Modelo implementado em software

O problema, este foi resolvido computacionalmente, o qual gerou o relatório de resposta apresentado no quadro 2.

```

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 0
OBJECTIVE FUNCTION VALUE
1) 785.6403
VARIABLE VALUE REDUCED COST
X1 657.057983 0.000000
X2 34.299999 0.000000
X3 233.240005 0.000000
X4 22.540001 0.000000
X5 34.299999 0.000000
X6 7.140000 0.000000
X7 3.131000 0.000000
X8 8.291000 0.000000

```

Fonte: Dados obtidos pelo autor

Quadro 2 - Relatório de resultados gerados por resolução computacional

Conforme o relatório gerado, percebe-se que para a redução dos custos de produção da ração, mantendo-se os padrões de nutrição exigidos podem ser implementadas algumas variações nas quantidades dos ingredientes.

A tabela 5 apresenta as quantidades utilizadas no processo de produção atual, bem como as sugeridas pelo modelo de otimização.

| Ingredientes | Quantidades utilizadas (Kg) | Quantidades sugeridas (Kg) |
|-----------------------------|-----------------------------|----------------------------|
| Milho (Kg) | 650,470 | 657,057 |
| Óleo de soja (Kg) | 35,000 | 34,299 |
| Farelo de soja 46% (Kg) | 238,000 | 233,240 |
| Farinha de carne 42,7% (Kg) | 23,000 | 22,540 |
| Farinha de penas (Kg) | 35,000 | 34,299 |
| Calcáreo 38% (Kg) | 7,000 | 7,140 |
| Sal branco comum (Kg) | 3,070 | 3,131 |
| Núcleo (Kg) | 8,460 | 8,291 |

Fonte: Dados obtidos pelo autor

Tabela 5 - Quantidades dos ingredientes, utilizadas e sugeridas para produção de um lote de 1.000 kg de ração

5 Comparação entre modelo utilizado na empresa e modelo de otimização proposto

Para visualizar a redução dos custos na produção de rações, foi comparado o procedimento realizado pela empresa que forneceu os dados (aqui chamado de método empírico), com o modelo científico de otimização.

5.1 Modelo Utilizado na Empresa

Atualmente a empresa possui um sistema informatizado que controla toda a produção de forma automatizada onde a fórmula é pré-determinada. O controle é igualmente estabelecido para todos os tipos de rações produzidos. Para fazer o comparativo, tomou-se como base o tipo de ração chamado de “Ração Retirada - 400”, a mesma base do cálculo do modelo de otimização.

De acordo com os dados coletados na empresa, são apresentados na tabela 6, as quantidades e o custo de cada ingrediente utilizado para produzir 1.000 Kg de Ração Retirada - 400.

| Ingredientes | Quantidade (Kg) | Custo (Kg) | Custo por tonelada |
|---------------------------------|-----------------|------------|--------------------|
| Milho (Kg) | 650,470 | R\$ 0,45 | R\$ 292,71 |
| Óleo de soja (Kg) | 35,000 | R\$ 2,96 | R\$ 103,60 |
| Farelo de soja 46% (Kg) | 238,000 | R\$ 1,20 | R\$ 285,60 |
| Farinha de carne 42,7% (Kg) | 23,000 | R\$ 0,65 | R\$ 14,95 |
| Farinha de penas (Kg) | 35,000 | R\$ 0,92 | R\$ 32,20 |
| Calcáreo 38% (Kg) | 7,000 | R\$ 0,11 | R\$ 0,77 |
| Sal branco comum (Kg) | 3,070 | R\$ 0,25 | R\$ 0,77 |
| Núcleo (Kg) | 8,460 | R\$ 7,33 | R\$ 62,01 |
| Custo total por tonelada | | | R\$ 792,61 |

Fonte: Dados obtidos pelo autor

Tabela 6 - Quantidades e custo dos ingredientes utilizados no modelo utilizado na empresa

Observa-se que o custo total de fabricação da ração retirada é de R\$ 792,61 por tonelada, utilizando a programação atual das máquinas.

5.2 Modelo Otimizado

O cálculo do custo pelo modelo de otimização prevê diferentes consumos de ingredientes na fabricação de rações para se chegar à redução dos custos totais de produção.

A tabela 7 mostra a quantidade proposta pelo modelo otimizado, para produzir 1000Kg de ração.

| Ingredientes | Quantidade (Kg) | Custo (Kg) | Custo por tonelada |
|---------------------------------|-----------------|------------|--------------------|
| Milho (Kg) | 643,818 | R\$ 0,45 | R\$ 295,68 |
| Óleo de soja (Kg) | 35,700 | R\$ 2,96 | R\$ 101,53 |
| Farelo de soja 46% (Kg) | 242,760 | R\$ 1,20 | R\$ 279,89 |
| Farinha de carne 42,7% (Kg) | 23,460 | R\$ 0,65 | R\$ 14,65 |
| Farinha de penas (Kg) | 35,700 | R\$ 0,92 | R\$ 31,56 |
| Calcáreo 38% (Kg) | 7,140 | R\$ 0,11 | R\$ 0,79 |
| Sal branco comum (Kg) | 3,131 | R\$ 0,25 | R\$ 0,78 |
| Núcleo (Kg) | 8,291 | R\$ 7,33 | R\$ 60,77 |
| Custo total por tonelada | | | R\$ 785,64 |

Fonte: Dados obtidos pelo autor

Tabela 7 - Modelo Otimizado: Quantidades e custo dos ingredientes utilizados

Comparando os resultados obtidos, verifica-se uma redução no custo por tonelada produzida de R\$ 6,97. Na empresa em que os dados foram obtidos, produz-se em média 280 toneladas por dia. Com base nesses índices a diferença no custo de produção diário seria de mais de 1.900 reais.

Sendo assim, o sistema se mostra eficiente, produzindo um diferencial significativo quando se considera o custo diário de produção da fábrica.

6 Considerações finais

Um dos objetivos deste trabalho, foi o de demonstrar que as empresas podem usufruir de ferramentas ainda pouco conhecidas, as quais podem trazer diferenciais significativos em sua rentabilidade.

O modelo proposto pode ser implementado em qualquer outra empresa que produza rações, ou até em outros tipos de problemas de misturas como medicamentos, ligas metálicas, alimentos, etc, servindo como base estrutural para o desenvolvimento e adaptação para outros estudos.

Há de se considerar que devido às restrições referentes ao paladr da ração, optou-se por desviar-se da fórmula original em apenas 2% para cima e para baixo, e mesmo assim houve uma redução de custo considerável. Um estudo pode ser realizado para verificar se esse percentual de variabilidade poderia ser aumentado, o que ocasionaria uma redução maior ainda no custo de produção. Do ponto de vista administrativo a aplicação do modelo de otimização reverterá em redução de custos operacionais gerando maior lucratividade na produção.

Apesar da Pesquisa Operacional ser uma área de pouco conhecimento pelas empresas, sua eficácia é comprovada, de forma a buscar a melhoria de desempenho dos mais variados processos industriais, comerciais ou logísticos.

Para estudos futuros, sugere-se ainda a análise do núcleo, componente da ração que se constitui de hormônios, vitaminas, entre outros, chamados micro ingredientes, que podem ser estudados separadamente da fórmula analisada nesse trabalho o qual tratou de macro ingredientes bem como o estudo sobre a alteração no paladar de forma a verificar qual a margem de variabilidade segura para alterações na quantidade dos ingredientes da fórmula.

7 Referências bibliográficas

ANDRADE, Eduardo Leopoldino de. Introdução á Pesquisa Operacional, métodos e modelos para análise de decisões. 3ª edição. Rio de Janeiro: LTC editora, 2002.

CAIXETA-FILHO, José Vicente. Pesquisa Operacional: Técnicas de Otimização Aplicadas a sistemas Agroindustriais. São Paulo: Atlas, 2004.

CHIAVENATO, Idalberto. Administração nos novos tempos, 2ª edição. Rio de Janeiro: editora Campus, 2005.

GOLDBARG, Marco César; LUNA, Henrique Pacca L. Otimização combinatória e Programação Linear. 2ª edição. São Paulo: editora Campus, 2005.

LOESCH, Cláudio. HEIN, Nelson. Pesquisa Operacional fundamentos e modelos. Blumenau: Editora da FURB, 1999.

MOREIRA, Daniel A. Administração da produção e operações. 3ª edição. São Paulo: Livraria pioneira editora, 1998.

ROSTAGNO, Horácio Santiago. Tabelas brasileiras para aves e suínos, composição de alimentos e exigências nutricionais. 2ª edição. Viçosa: UFV, Departamento de zootecnia, 2005.